Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie P un punct în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $PA = 1$, $PB = \sqrt{2}$ şi $PC = \sqrt{3}$.

a) Determinaţi lungimea segmentului $[PD]$.

b) Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle APB$.

Problema 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se consideră punctele $D \in (AC)$ şi $E \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$. Arătaţi că $BE = 2 \cdot AD$.

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule (m, n) astfel încât numerele

$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \text{ şi } \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$

sâ fie întregi.

a) Arătaţi că $|m - n| \leq 2$.

b) Găsiţi toate perechile (m, n) cu proprietatea din ipoteză.

Problema 4. Numim *redus* al unui număr natural A cu n cifre $(n \geq 2)$ un număr de $n - 1$ cifre obţinut prin ştergerea uneia din cifrele lui A. De exemplu, reduşii lui 1024 sunt 124, 104 şi 120.

Determinaţi câte numere de şapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural A şi un *redus* al lui A.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.